上越数学教育研究，第 21 号，上越教育大学数学教室，2006 年，pp.31-40.

中学校図形領域における証明の意義の指導について

五十嵐　真
上越教育大学大学院修士課程２年

１．研究の動機と目的

筆者は論証のストラテジーの指導を行えば生徒は証明を記述できるようになると考えて証明の指導を行ってきた。しかし、いくらストラテジーを指導しても証明の記述がなされない実態があった。佐伯(1995)に触れ、生徒は証明を学ぶことができないのではなく、そもそも「証明の世界」に入ること自体を拒絶しているのではないかと考えた。実際、中学校の図形領域で生徒が学ぶ性質には小学校で既習のものもあり、証明の意義を理解していない生徒にとっては証明する必要性は感じられない。これまでにも証明の意義の理解をめざした研究は行われているが、証明の意義の理解過程は明らかではない。

証明の意義の理解過程について、五十嵐(2005)は、問題意識と合致する証明が提供された場合は証明の意義が理解され、証明が提供されても問題意識と合致しない場合は証明の意義の理解はなされなかったと報告し、証明の意義の指導においては問題意識と合致する証明を提供することが必要であると述べている。しかし、実際の授業を見てみると、必ずしもそうとはいえない場合もある。

そこで、本稿では、問題意識と合致する証明が提供されて証明の意義の理解がなされた授業と、問題意識と合致する証明が提供されたにも関わらず証明の意義の理解がなされなかった授業とを比較・考察することにより、証明の意義の指導へのさらなる示唆を得ることを目的とする。

２．調査方法

佐伯(1995)の「文化的実践への参加」の学習観の立場に立てば、生徒を「証明の世界」へ誘うには、証明の意義を知識として理解させる指導ではなく、証明以外の方法では問題を解決できない状況に生徒を置き、証明自体に備わっている機能に意義を見出させる指導を行う必要があるといえる。

なお、本稿では意義を「人がある事柄の中に見出すその事柄に備わっている機能のよさ」とする。人と事物の関わりを考える一つの観点として、人にとってその事物がどのような働きを持っているか、つまり、その事物の機能ということがあげられよう。多くの機能が備わっている事物でも、それらの機能に意義を見出すことがなければその事物の意義は理解されない。しかし、１つの機能でもその機能が自らの感じている問題を解消してくれたり、自分にとって新しい可能性を開いてくれたりして、そのよさを感得することができたならば、事柄の意義は理解されるであろうからである。

deVilliers(1990)によれば、証明に備わっている機能は、立証、説明、体系化、発見、コミュニケーションである。そして、Hanna(2000)や梅川(2002)によれば、証明の

導入期には説明の機能に重点を置くべきであるといえる。そして、説明の機能に証明の意義を見出させるためには、Hadas ら(2000)やBalacheff(1997)から、矛盾や不確実性の状況に生徒を置くことによって「なぜか」との問題意識を発生させることが有効であるといえる。

そこで、生徒を矛盾や不確実性の状況に置くことによって「なぜか」との問題意識を発生させることを意図した授業を単元の中でできるかぎり実施し、生徒の証明の意義の理解過程を明らかにしていくこととする。

調査授業は、新潟県内の公立中学校２年生１クラスの少人数指導(生徒数 30 名)の授業において、対頂角から直角三角形の合同条件までの全23時間について筆者自身が行った。

観察は、一人の生徒幸太君(仮名)を対象として行った。観察の記録は、VTR ２台を使用し、１台は幸太君の表情やノートへの記述を撮影し、もう１台は授業での教師の説明と黒板の記述の様子を撮影した。

ビデオの記録やノート等のコピーをもとにプロトコルを作成し、それに基づき分析を行った。証明の意義の理解については、Hanna(2000)をもとに、証明の記述の有無に関わらず、証明によって反論、説得、納得を行おうとする行動がなされたときになされたとして捉えた。

３．対頂角の授業(第１時～第３時)

対頂角の授業は、証明の意義の理解がなされた事例である。

3.1. 授業の概要

１時間目の場面１では、１点Ｐから出る半直線を４本描く課題が与えられ、大作君(以下、すべて仮名)、博子さん、飛馬君、龍一君の４人が発表を行った(図１～図４)。

１時間目の場面２では、図１～４を分類する課題が与えられた。結衣さんは、角度が全部一緒のグループ｛大作君、龍一君｝と角度が２つ一緒のグループ｛博子さん、飛馬君｝に分類した。この結衣さんの意見に対して幸太君から、ａ(図１)は微妙ではないかとの意見が出された。

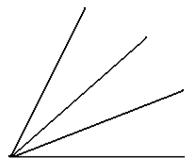

図１（ａ大作）

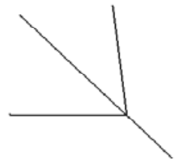

図２（ｂ博子）

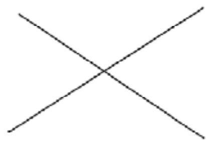

図３（ｃ飛馬）

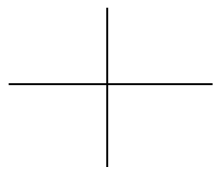

図４（ｄ龍一）

１時間目の場面３では、幸太君の意見を受けて、角度が等しいといえるのかどうかについての議論が行われた。図４を描いた龍一君から、自分としては角度を等しく描いたつもりではないとの発言があった。また、図３を描いた飛馬君からは、角度を等しくなるようにして描いたとの発言があった。

１時間目の場面４では、「本人が描いたつもりでないのに角度が等しく見えるときがあるのは一体どういうことか。本当は、等しいのか、それとも等しくないのか」について、話し合いが行われた。

２時間目は、１時間目で一直線のグループ｛博子さん、飛馬君、龍一君｝と一直線でないグループ｛大作君｝に分類した生徒から、直線の本数を言ってもらった。また、角度が全部一緒のグループ｛大作君、龍一君｝と角度が２つ一緒のグループ｛博子さん、飛馬君｝に分類した結衣さんから、等しい角に印をつけてもらった。そして、図を描いた大作君、博子さん、飛馬君、龍一君に角度が等し

くなるように描いたつもりがあるのか再度確認した。飛馬君以外の３人は角度が等しくなるように描いたつもりはないとの答えだった。そこで、「正しいのはどれか、正しくないのはどれか」、「どう確かめたらいいか」、「直線が交わっているように見えるとき、向かい合う角は本当に等しいのか」などと問いかけた。グループで話し合いを行わせようとしたが、多くの生徒が何を話し合ったらよいのか分からない様子だった。

３時間目の場面１では、龍一君(図４)は直線２本ではなく半直線４本を描いたこと、飛馬君(図３)は半直線４本ではなく直線２本を描いたことが確認された。

３時間目の場面２では、どの角が等しくてどの角が等しくないといえるのかについて追究が行われた。等しいか等しくないかの判断とそう判断した理由について生徒は考えた。

３時間目の場面３では、飛馬君の図(図３)の向かい合う２つの角が等しいと判断した理由が結衣さんから発表された。結衣さんは「30 度と 30 度、150 度と 150 度であるから等しい」との説明を行った(図５)。

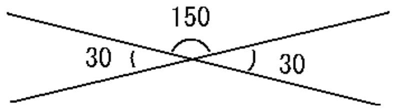

図５

３時間目の場面４では、「結衣さんが 150 度とした部分を 170 度とした場合、他の角度が何度になるのか」との課題をとおして、１点を通る２本の直線の図について向かい合う２つの角は等しいことの説明が行われた。このとき、結衣さんが 150 度であるとした角度よりも明らかに小さい角度で教師が 170 度の図(図６)を描いたため、他の角度は 10 度ずつになることについて、生徒から「(図６の 10 度の部分は)上(図５)の 30 度よりも大きい気がする」との指摘がなされた。

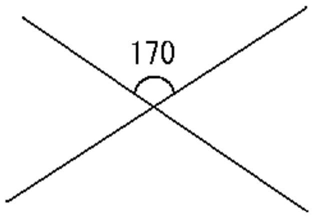

図６

そこで、図６について、教師から「もし、ここが 170(度)になったとしたら、ここ 10 (度)でいいと思う人？」との質問がなされた。この質問により大部分の生徒は 10 度ずつであることを認めた。最後に、教師と生徒とのやりとりによって、150 度や 170 度とした部分をｘ度とすると、それに隣り合う２つの角度はそれぞれ 180 − ｘ度と 180 − ｘ度だから、１点を通る２本の直線の図について向かい合う２つの角は等しいとの証明がなされた。

3.2. 幸太君の問題意識の発生について

１時間目の場面２で、結衣さんが「大作君と龍一君の図は角度が全部等しく、博子さんと飛馬君の図は角度が２つ一緒である」と言ったのに対して、幸太君は、ａ(図１)は微妙であるとの意見を自ら述べた。このことから、幸太君は龍一君の図(図４)については結衣さんと同様に「龍一君の図(図４)は全ての角が等しい」と認識し、そうであることを期待していたと捉えられる。実際、その後「ｄ(図４)は一緒になると思うけど、ａ(図１)はどうなるかわからない。」との発言が見られる。

ところが、１時間目の場面３で、龍一君自身から、角が等しくなるように描いたつもりはないとの発言がなされる。龍一君のこの発言は幸太君の「図４は全ての角が等しい」との認識と矛盾するものである。そこで、幸太君は「どういうことなんでしょうかねー？」、「ウソ発見器」と自分自身が不確実性の状況に置かれたことを口に出して表現している。

角度について自分が図を見て行った判断と図を実際に描いた人の意見とが整合せず、幸太君は不確実性の状況に置かれ、問題意識が発生したといえる。

１時間目の場面４で、幸太君は「直線(が)交わればさ、にとうかくさんかくけいになるじゃん。」、「直線(が)交わればさ、絶対同じ角度２つ出てくるじゃん。」と発言している。この発言から、幸太君に発生した問題意識は「図４は直線が２本交わっている。だから、龍一君自身は角度を等しくなるように描いたつもりはなくても、向かい合う角は等しくなって当然ではないか？」であると考えられる。

しかし、２時間目の授業では、この幸太君が前提としている図４が１点から延びる半直線４本ではなく１点を通る直線２本の図であることについて確認がなされなかった。２時間目の授業は４人の図を分類した生徒に対して確認が再びなされただけで、図を描いた４人の生徒に対して図の描き方について確認はなされなかった。話し合いの場面で幸太君だけでなく他の生徒も混乱していたのは、一度に複数の指示を与えたり、指示が明確でなかったりしたこと以上に、議論の前提が不明確だったことが原因であると考えられる。

３時間目の場面１において、図３を描いた飛馬君が直線２本を描いたとした際に幸太君は「直線２本じゃないですか」と発言した。このことから、幸太君は図３が他の３人の図とは異なること、つまり、自分自身は直線２本であると思っていた図４は直線２本ではないことを認識したと考えられる。

しかし、３時間目の場面２において、教師から４人の図それぞれについて向かい合う２つの角が等しくなりそうか否かについて問われた際、いずれの問いかけに対しても幸太君は挙手をせず、頬杖をつきながら黒板を見つめてボーっとしていた。幸太君のこの行動を解釈するのは難しいが、黒板を見つめている様子から、幸太君は何かについて考えていたととらえられる。３時間目の場面１で「図４は直線が２本交わっていないのに、向かい合う角が等しいのはなぜか？」との問題意識や「もしかしたら、図４では向かい合う角は等しくないのでは？」との問題意識が発生していたとすれば、これら２つの疑問について考えていたととらえられる。これら２つの疑問を同時に考えていたとすれば、上の教師からのいずれの問いかけにも手を挙げられないことは当然といえる。

このことから、幸太君は、図４は直線が２本交わっているとの予想に反する龍一君の発言によって矛盾を認識したと考えられる。そのことで、「図４は直線が２本交わっている。だから、龍一君自身は角度を等しくなるように描いたつもりはなくても、向かい合う角は等しくなって当然ではないか？」との問題意識から、「図４は直線が２本交わっていないのに、向かい合う角が等しいのはなぜか？もしかしたら、図４では向かい合う角は等しくないのではないか？」との問題意識に変化した可能性がある。

３時間目の場面３において、図３について向かい合う２つの角は等しくなるとの結衣さんの説明に対して、幸太君は「微妙だ」とつぶやく。他の生徒の「(直線を２本交わるようにすれば)どこ引いても、向かい合う角は一緒になるんじゃないの？」という意見に対しても、再び「微妙じゃない？」とつぶやく。龍一君本人から図４は直線２本ではなく半直線４本であることが確認される３時間目の場面１までは、幸太君も「直線が２本交わっていれば、角度を等しくなるように描いたつもりはなくても、向かい合う角は等しくなって当然ではないか？」との問題意識をもっていた。にもかかわらず、直線が２本交わっていれば、どのように直線を交わらせても向かい合う角は等しくなるという意見に対して「微妙じゃない？」とつぶやいたのは、どういうことであろうか。「図４は直線が２本交わっ

ているから向かい合う２つの角は等しくなっている」という最初の予想と「図４は直線２本ではなく、半直線４本である」という事実との間に３時間目の場面１で矛盾が発生した結果、図３のような直線２本の図も図４のような半直線４本の図と同様の図であると考え始めたために、「描かれた図には微妙なずれがある」との考えがなされたと考えられる。

矛盾の発生により、幸太君の中に「図４は直線が２本交わっていないのに、向かい合う角は等しいのはなぜか？もしかしたら、図４では向かい合う角は等しくないのではないか？」との問題意識だけでなく、さらに「描かれた図には微妙なずれがあるから、直線が２本交わっても向かい合う角は等しくないのではないのか？」との問題意識が発生したと考えられる。

3.3. 幸太君の証明の意義理解について

３時間目の場面３において、幸太君は「図４は直線が２本交わっていないのに、向かい合う角は等しいのはなぜか？もしかしたら、図４では向かい合う角は等しくないのではないか？」、「描かれた図には微妙なずれがあるから、直線が２本交わっても向かい合う角は等しくないのではないのか？」との問題意識をもっている。

このような問題意識をもっている幸太君に対して、３時間目の場面３において結衣さんから、図５を用いて「30 度と 30 度、150 度と 150 度であるから等しい」との説明が提供される。しかし、「微妙だ」との発言からは、この説明では問題意識が解消されなかったといえる。半直線４本ではなく直線２本であるとの仮定が強調されなかったことと、直線の作る角は 180 度であるという理由の説明が不足していためであると考えられる。

しかし、３時間目の場面４における教師による図６を用いた結衣さんの説明への追加説明の最中に、幸太君は図６を見ながら「分かってきたぞ」と自分自身の納得が得られつつあることを口に出している。また、教師が「もし、ここが 170(度)になったとしたら、ここ 10(度)でいいと思う人？」との質問に続いて 10 度の求め方を確認した際、180 − 170 だから 10 度であるとの求め方について「あってると思うよ」と認める。この求め方を認めるためには、半直線４本が延びているのではなく直線２本が交わっているとの認識が不可欠である。教師の追加説明を聞きながら、直線２本が交わっているとの仮定が認識されたといえる。仮定が認識され、「描かれた図には微妙なずれがあったとしても、直線が２本交わっていると仮定すれば向かい合う角は等しいといえる」と思考したことにより、「描かれた図には微妙なずれがあるから、直線が２本交わっても向かい合う角は等しくないのではないのか？」との問題意識が解消されたと考えられる。

また、幸太君は「トータルで 360 度になるって話」、「っていうか、180 度になればいいかなーって思って」と発言する。このことから、教師や教師とやりとりをしている生徒の説明の文脈は「向かい合う２つの角は、どちらも 180 度から 170 度を引いて 10 度であるから等しい」であるが、この説明を幸太君は「向かい合う２つの角は、どちらも 170 度と 10 度を足し合わせて 180 度になるから等しい」と捉えたと考えられる。直線２本が交わっているときに向かい合う角が等しくなることについての説明が提供され、「図４では、龍一君本人が直線２本ではなく半直線４本を描いたつもりであったとしても、直線２本が交わっている状態ならば足し合わせて 180 度になることから向かい合う角は等しくなり、直線２本が交わっていない状態ならば足し合わせて 180 度にならないことから向かい合う角は等しくならない」と思考したことにより、「図４は直線が２本交わっていないのに、向かい合う角は等しいのはなぜか？もしかした

ら、図４では向かい合う角は等しくないのではないか？」との問題意識が解消されたと推測される。

さらに、「私の説明に何か反論できる人？」、「もし、ここが 170(度)になったとしたら、ここ 10(度)でいいと思う人？」、「見た目は関係ないのでは？」との教師の質問に対して、幸太君は「無理だ。勝てない。俺たち。」と発言する。この発言は、見た目で違っていると反論したかったがそれができなかったことを示していると考えられる。半直線４本ではなく直線２本であると仮定し、さらにそれらが見た目では明らかに 170 度でなくても 170 度で交わっていると仮定すると、180 － 170 という計算によって 10 度であると結論づけざるを得ない。幸太君は、証明によって相手を説得し、反論できない状態にできることを知ったといえよう。Hanna(1996)は「議論の正当性がどんな外部からの権威からでもなく、証明それ自身から生じるのはまさしくその証明の本質」と述べているが、その証明の本質に触れることができたといえよう。

４．証明の手順の授業(第 16 時～第 18 時)

証明の手順の授業は対頂角の授業と類似した事例であるが、証明の意義の理解はなされなかった事例である。

4.1. 授業の概要

１時間目は、「ＡＤ//ＢＣである四角形ＡＢＣＤにおいて、辺ＣＤの中点をＥとし、ＡとＥを結ぶ。ＡＥの延長とＢＣの延長との交点をＦとする。このとき、どんなことがいえそうか。」(教科書⊂問３⊃改)という課題を与え、図を描かせた。時間の都合で図をかくところまでで授業が終わった。

２時間目の場面１では、正方形ＡＢＣＤをかいた花子さん、幸太君、長方形ＡＢＣＤをかいた結衣さん、平行四辺形ＡＢＣＤをかいた明菜さんの４人の生徒から黒板に自分の図を発表してもらった(図７～図 10)。なお、図８の頂点記号については、生徒の指摘に基づいて幸太君の合意の上で教師が修正した。

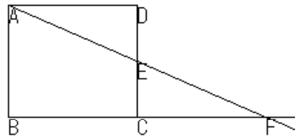

図７(花子さん)

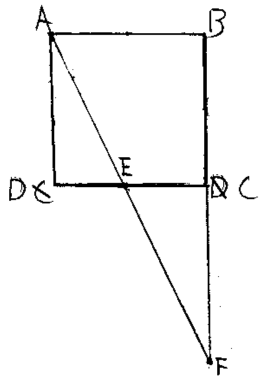

図８(幸太君)

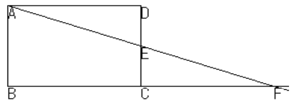

図９(結衣さん)

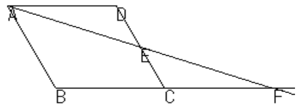

図 10(明菜さん)

２時間目の場面２では、「自分自身が描いたつもりがないのに起こってしまったこと・いえそうなこと」について、次の事柄が発表された。

［辺について］　・ＡＥ＝ＥＦ
　　　　　　　　・ＡＤ＝ＣＦ
　　　　　　　　・ＢＣ＝ＣＦ
［角について］　・∠ＡＤＥ＝∠ＡＢＣ
［その他］　　　・△ＡＥＤ≡△ＦＣＥ

なお、「△ＡＥＤ≡△ＦＣＥ」について、対応する順になっていないのは、生徒の発言どおりに板書したためである。

２時間目の場面３では、台形ＡＢＣＤを描いた真彦君から発表してもらった(図 11)。

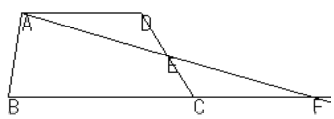

図 11(真彦君)

２時間目の場面４では、図 11 をもとに、２時間目の場面２で出された「自分自身が描いたつもりがないのに起こってしまったこと・いえそうなこと」について再確認した。その結果、次のとおりとなった。(○…いえそう、×…いえなさそう、？…分からない)

［辺について］　・ＡＥ＝ＥＦ→○
　　　　　　　　・ＡＤ＝ＣＦ→？
　　　　　　　　・ＢＣ＝ＣＦ→×
［角について］　・∠ＡＤＥ＝∠ＡＢＣ→×
［その他］　　　・△ＡＥＤ≡△ＦＣＥ→？

２時間目の場面５では、クラスの生徒全員が図 11 でもいえそうであるとした「ＡＥ＝ＥＦ」を結論として証明が行われた。結論は「ＡＥ＝ＥＦ」であることと仮定は「ＡＤ//ＢＣ、点ＥはＣＤの中点」であることを確認し、「結論をいうためには？」と解析的思考を行い、遡りきれなくなったところで「仮定から言えることは？」と総合的思考を行うという証明の考え方を指導した(図 12)。

解析的思考の途中で、教師が和也君に合同になりそうな三角形はどれとどれか聞いたところ、和也君は「△ＡＥＤ≡△ＣＥＦ」と答えた。これを受けて教師は、結論と対応させる工夫をするのであれば、結論が「ＡＥ＝ＥＦ」なのだから、「△ＡＥＤ≡△ＣＥＦ」ではなく「△ＡＥ□≡△ＥＦ□」とすべきであると伝えた。

解析的思考と総合的思考により、図 12 のように証明が進められた。

［証明］
仮定より、ＡＤ//ＢＣ　…①
仮定より、点ＥはＣＤの中点　…②
①より、平行線の錯角は等しいので、
　∠ＤＡＥ＝∠Ｆ　…③
　∠Ｄ＝∠ＥＣＦ　…④
　△ＡＥＤ≡△ＥＦＣ
合同な図形の対応する辺は等しいので、
　ＡＥ＝ＥＦ(証明終)

図 12

３時間目の場面１では、まず図 11 と図 12 が板書された。このとき、結論と対応させるのであれば「△ＡＥＤ≡△ＥＦＣ」とすべきであるとしていた部分について、結論と対応させるのではなく、２つの三角形の頂点同士を対応させるように「△ＡＥＤ≡△ＦＥＣ」と書かなければならないことを伝え、その部分について訂正した(図 13 参照)。次に、三角形の合同条件３通りを想起させ、ＡＤ＝ＣＦが言えれば、ＡＤ＝ＣＦと③と④から、一組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので２つの三角形は合同であることがいえるが、ＡＤ＝ＣＦはいえないことを説明した。そこで、③や④以外に仮定から言えることはないか問うた。②の点ＥはＣＤの中点であることからＤＥ＝ＣＥと表せることを説明した。さらに、対頂角は等しいという理由から∠ＡＥＤ＝∠ＦＥＣであることを確認し、図 13 のように証明が完成された。

［証明］
仮定より、ＡＤ//ＢＣ　…①
仮定より、点ＥはＣＤの中点　…②
①より、平行線の錯角は等しいので、
　∠ＤＡＥ＝∠Ｆ　…③
　∠Ｄ＝∠ＥＣＦ　…④
　②より、ＤＥ＝ＣＥ　…⑤
　対頂角は等しいので、
　　∠ＡＥＤ＝∠ＦＥＣ　…⑥
　④、⑤、⑥より、
　一組の辺とその両端の角がそれぞれ
　等しいので、
~~△ＡＥＤ≡△ＥＦＣ~~△ＡＥＤ≡△ＦＥＣ

合同な図形の対応する辺は等しいので、
　ＡＥ＝ＥＦ(証明終)

図 13

３時間目の場面２では、結論をいうために③の∠ＤＡＥ＝∠Ｆは使わなかったことを伝え、証明する際は結論をいうのに必要のない理由は書かないことを指導した。

4.2. 幸太君の問題意識の発生について

１時間目に与えられた課題に対して幸太君はコンパスを用いて中点をとった(図 14)。作図方法は誤っているものの、この行動から幸太君は自分自身としては仮定に基づいて図を正確に描いたと考えているととらえられる。２時間目の場面１で黒板に発表する際も、「俺、コンパス使うやり方なんだけど」と作図したことへのこだわりをみせている。

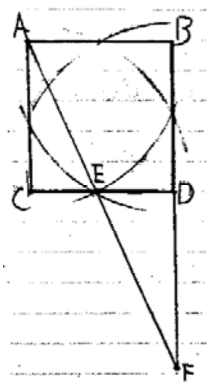

図 14

２時間目の場面３において、幸太君は自分自身が描いた図 14 の２つの三角形について「見た目でずれている」と発言する。さらに、２時間目の場面４において、発表された図７～図 11 について、クラスの中でただ一人「△ＡＥＤ≡△ＦＣＥではない」と主張した。２時間目の場面５においても、教師が和也君に合同になりそうな三角形はどれとどれか聞いているときに、教師がクラス全体に向けて言った「ま、幸太君の図(図８)では幸太君自身では『(合同と)いえないんじゃないか』とは言っているけど。」に反応して、幸太君は和也君から教師の方に向きを変えて「だって、ずれてるもん」とつぶやき、自分のノートの図を見た。また、この場面で幸太君は 10 回くらい「ずれてる」とつぶやいている。このことから、幸太君は、幸太君としては仮定に基づいて正確に作図した自分の図の見た目を根拠に、自分の図では２つの三角形は合同ではないとみなしていると考えられる。

このように、△ＡＥＤと△ＦＣＥは合同ではないとみなしているにもかかわらず、幸太君は教師の「△ＡＥＤ≡△ＥＦ$\boxed{?}$」との質問に対して、指名されていないのに「Ｃ」と発言する。幸太君は合同であることを認めたのであろうか。幸太君はこの発言の後も「ずれている」と何回もつぶやいていることから、この発言は幸太君がこれら２つの三角形が合同になることを認めているのではなく、この場面で幸太君が２つの三角形にとても注目していると解釈すべきであろう。

２つの三角形にとても注目しながら約 10 回も「ずれている」と発言していることと、合同かもしれないとの主旨の発言がないことから、幸太君の中に「自分の図は、ずれているから合同ではないのではないか？」との強い問題意識が発生したといえる。

4.3. 幸太君の証明の意義理解について

２時間目の場面５において、幸太君は「自分の図は、ずれているから合同ではないのではないか？」との強い問題意識をもっている。

この問題意識をもっている幸太君に対し、教師から「ＡＥ＝ＥＦ」をいうための解析的思考の途中で、幸太君が問題としている２つの三角形が合同であることを示す方向に話題が向けられた。三角形の合同条件を想起する活動が行われている最中、幸太君は図 15 に示したように四角形ＡＢＣＤの上辺ＡＢの中点と下辺ＣＤの中点とを数回にわたり線で結んだ後、「あ、忘れてた」とつぶやく。

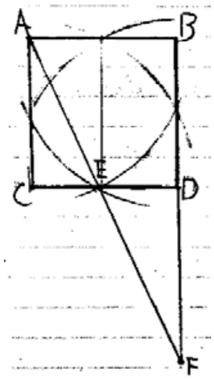

図 15

幸太君が忘れていたのは何であろうか。三角形の合同条件であろうか。それとも、二等分線の作図の際の最後の手順である弧の交点同士を結ぶ直線を引くことであろうか。この場面で、幸太君はノートに集中し教師と他の生徒との合同条件についてのやりとりにはあまり注意を向けていない。また、授業の最後に教師が「２つの三角形は本当に合同にならないんでしょうか？」と尋ねたのに対して「俺の、ずれてんだってばー！」と発言している。これらのことから、幸太君が忘れていたのは、三角形の合同条件ではなく、二等分線の作図の際の最後の手順である弧の交点同士を結ぶ直線を引くことについてであった可能性が高い。三角形の合同条件を忘れたと言っているのではないことから、この場面で幸太君は証明につながる三角形の合同条件には関心を向けていないといえる。

また、四角形ＡＢＣＤの上辺ＡＢの中点と下辺ＣＤの中点とを数回にわたり線で結ぶ行動からは、「自分の図は他の生徒とは違って正確に作図して描いたものある」と、自分の図の正確さを再確認し、「自分の図のように合同でない場合もあるのではないか」との問題意識をより強くしたことが考えられる。

いつもよくしゃべる幸太君であるが、3時間目の証明が完成する場面では一言も発言がなかった。２つの三角形が合同であることを納得したことをうかがわせる発言もなく、証明の手順の授業においては、幸太君が証明の意義を理解したとはいえない。

５．問題意識と証明の意義理解の関係

証明の手順の授業においては、「自分の図は、ずれているから合同ではないのではないか？」との強い問題意識をもっている幸太君に対して、問題意識と一見合致する証明が提供され始めたにも関わらず、幸太君は証明に関心を向けていない。対頂角の授業において見た目よりも証明が優先されることを学んだ幸太君が、証明に関心を向けていないのはなぜであろうか。２つの要因が考えられる。

第１に、「命題は偽であろう」との強い問題意識をもつ生徒に対して「命題は真である」との証明が提示される前に「命題は真かもしれない」との問題意識が発生していないことが考えられる。対頂角の授業では、幸太君自身は図を描かず、他の生徒から見た目には同じ条件に見えるが条件の異なる２つの図が示された。一方、証明の手順の授業では、不正確ではあるが幸太君としては正確な作図を行った。その結果、対頂角の授業では「角は等しいのか、それとも、等しくないのか。なぜ等しくなるのか」との問題意識が発生した。一方、証明の手順の授業では「なぜ合同になるのか」との問題意識は弱く、「自分の図のように合同でない場合もあるのではないか」との問題意識ばかりが強く発生した。

このように、証明の手順の授業においては、「合同でない」との強い問題意識ばかりで「合同かもしれない」との問題意識が発生しなかったことが、証明に関心を向けていない要因の１つめとして考えられる。

第２に、証明が単に提示されたことが考えられる。対頂角の授業では、「角は等しいのか、それとも、等しくないのか。なぜ等しくなるのか」との問題意識をもっていたため、幸太君は角が等しくなる根拠を証明に求め、証明によって仮定が結論に関わっていることを幸太君は理解した。一方、仮定が結論に関わっていることを理解した幸太君であるが、証明の手順の授業では、仮定に基づいて自分としては正確に作図した図を根拠として「合同でないのではないか」との問題意識をもった。また、「合同でないのではないか」との問題意識をもつ幸太君に対して、ただ単に「合同である」との証明が提示されただけで、幸太君の問題意識のどこが誤りであるかについての説明はなされなかった。

このように、証明の手順の授業においては、

問題意識と一見合致する証明が提供されたものの、提供されただけで問題意識の根拠のどこが誤りであるかについての説明がなされなかった。このことが、証明に関心を向けていない要因の２つめとして考えられる。

不正確な図や見た目を根拠として証明を受け入れようとしない生徒に証明を受け入れてもらうためには、証明の提供の前後に証明を受け入れてもらうための方策を講じる必要があるといえる。事前の方策としては、図が不正確な場合は正しい条件で作図されているか実測させたり、図を正確に描き直させたりすることが考えられる。それでも合同に見えないことを根拠に合同でないとする生徒に対しては、紙などの操作・観察によって合同になりそうなことを確認させることが考えられる。このように、まずは証明によらない方法で反例としてあげた例が誤りであることを納得させた上で証明を提示することが必要であろう。事前の方策を講じた上で、証明の提示後の方策として、証明に基づきながら「合同でないのではないか」との問題意識のどこが誤りであったのかについての指摘を行うことが考えられる。

６．まとめと今後の課題

一度、証明の意義を理解し、見た目よりも証明が優先されることを学んだ生徒であっても、正しくない図にこだわり続けて「命題は偽であろう」との強い問題意識をもっている場合は、「命題は真である」との証明が提示されたとしても、証明を受け入れようとしない場合があることが明らかになった。

このことから、証明の意義の指導への示唆として次の２点があげられる。

①「命題は偽であろう」との強い問題意識をもつ生徒に対して「命題は真である」との証明を行う場合は、証明を提示する前に「命題は真かもしれない」との問題意識を発生させる必要がある。

②「命題は偽であろう」との強い問題意識をもつ生徒に対して「命題は真である」との証明を提供する場合は、単に証明を提供するのではなく、その生徒の問題意識の根拠のどこが誤りであるのかについての説明を証明以外の方法も視野に入れながら行う必要がある。

なお、①は Hadas ら(2000)が指摘する「不確実性の状況から次の推測へと“押す”こと」とも符合する。証明の意義の理解のためには真偽についての不確実性のバランスが重要であるといえる。

②について実際に検証を行うことが今後の課題である。

引用・参考文献

Balacheff, N.（1997）. 数学的証明の学習の改善：実践を改善するための理論的枠組み. 数学教育学論究, *67&68*, 52-62.

de Villiers, M.（1990）. The role and funciton of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17-24.

Hadas, N. , Hershkowitz, R. , and Schwarz, B.（2000）. The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 127-150.

Hanna, G.（1996）. 学校教育における証明の役割(磯野正人訳）. 上越数学教育研究, *11*, 155-168.

五十嵐真.（2005）. 図形領域における証明の意義の理解過程について. 第 38 回数学教育論文発表会論文集, 535-540.

梅川貢司.（2002）. 数学教育における証明の意義指導に関する基礎的研究：Action Proof を選択肢に取り入れた証明の意義理解調査から. 上越数学教育研究, *17*, 67-78.

佐伯胖.（1995）. 文化的実践への参加としての学習. 佐伯胖, 藤田英典, 佐藤学(編). 学びへの誘い(pp.1-48). 東京大学出版会.